Minsky の調和写像の歪曲度の評価式

坂井 健人

2024 年 1 月 23 日

概要

このノートの目的は，Minsky が与えた曲面間の調和写像の歪曲度に関する不等式 [Min92] を紹介することである．

1　準備

S を向き付けられた曲面とし，σ, ρ を S 上の Riemann 計量とする．それぞれに関する等温座標を z, w とする．このとき，$\sigma = \sigma(z)\,dz^2, \rho = \rho(w)\,dw^2$ と表される．

Definition 1.1. C^∞ 級写像 $f\colon (S,\sigma) \to (S,\rho)$ の**ヤコビアン (Jacobian)** とは，曲面上の関数

$$J \coloneqq J_f \coloneqq \frac{f^* dA(\rho)}{dA(\sigma)} = \frac{\rho(f)}{\sigma}(|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2)$$

のことである．ここで，$dA(\sigma), dA(\rho)$ は σ, ρ それぞれの体積形式を表す．

$f\colon (S,\sigma) \to (S,\rho)$ が $J_f > 0$ を満たす調和写像のとき，$(f^*\rho)^{2,0}$ は $X \coloneqq (S, z)$ 上の正則 2 次微分になる．この正則 2 次微分を f の **Hopf 微分 (Hopf differential)** という．これを Φ で表すことにする．Φ の **natural (cannonical) coordinate** を $\zeta = \xi + i\eta$ で表す．すなわち，$p \notin \Phi^{-1}(0)$ の近傍で

$$\Phi(z)\,dz^2 = d\zeta^2$$

と表される．このとき，

$$f^*\rho = (\sigma e + 2)\,d\xi^2 + (\sigma e - 2)\,d\eta^2$$

と表される．ここで，

$$e \coloneqq e(f) \coloneqq \frac{\rho(f)}{\sigma}(|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2)$$

である．また，f の複素歪曲度のノルムを $|\nu| \coloneqq |f_{\overline{z}}|/|f_z|$ で表し，$G = \log(1/|\nu|)$ とおく．f が向き付けを保つことから，$0 \leq |\nu| \leq 1$ であることに注意する．G は f の「歪めなさ具合」を表す量で，∞ に近ければ近いほど等角写像に近く，0 に近いときはある方向をかなり縮めている．この G の置き方が，Minsky の妙であるように思う．調和写像の歪め具合はあまりとっかかりが無いように感じるのだが，この置き方により，素晴らしく色々なことがわかるのである．

Proposition 1.2. 次の等式が成り立つ.

$$\cosh G = \frac{\sigma e}{2|\Phi|}, \quad \sinh G = \frac{\sigma J}{2|\Phi|}. \tag{1.1}$$

Proof. 次の公式から直ちに従う.

$$\sigma e = \rho(f)|f_z|^2(1+|\nu|^2), \quad \Phi = \rho(f) f_z \overline{f}_z, \quad |\Phi| = \rho(f)|f_z||f_{\overline{z}}| = \rho(f)|f_z|^2|\nu|.$$

□

Definition 1.3. σ に関する **Laplace-Beltrami 作用素**を

$$\Delta_\sigma := \frac{2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$$

で定める.

Proposition 1.4. G は次の等式を満たす.

$$\Delta_\sigma G = -4K(\rho)\frac{|\Phi|}{\sigma}\sinh G.$$

2 Minsky の不等式

ρ を負曲率な計量とし，簡単のため $M = (S, \sigma), N = (S, \rho)$ とおいておく．$f\colon M \to N$ を微分同相な調和写像とする.

Lemma 2.1 (Rough bound)**.** 中心 $p \in M$，$|\Phi|$-計量で半径 r の円盤 $B_{|\Phi|}(p, r)$ は Φ の零点を含まないとする．また，$B_{|\Phi|}(p, r) \subset M$ は埋め込まれていると仮定する．このとき

$$G(p) \leq \sinh^{-1}\frac{\mathrm{Area}(N)}{2\pi r^2}$$

が成り立つ.

Proof. Proposition 1.4 により，$B_{|\Phi|}(p, r)$ 上 $\Delta_\sigma G \geq 0$ である．したがって，G は $B_{|\Phi|}(p, r)$ 上，劣調和関数である．したがって次の平均値不等式が成り立つ.

$$G(p) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(se^{i\theta})\, d\theta \quad (0 \leq s \leq r) \tag{2.1}$$

ここで，$\zeta = (\xi, \eta)$ を Φ の natural coordinate とし，(s, θ) は p を中心とする (ζ に関する) 極座標を表す．いま，$|\Phi| \equiv 1$ であることに注意する．(2.1) の両辺に $\int_0^r s\, ds$ をつけると，

$$G(p) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \int_0^{2\pi} G(se^{i\theta})\, s\, ds d\theta$$

を得る．Proposition 1.2 により

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} G(se^{i\theta})\, s\, dsd\theta = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} \sinh^{-1}\left(\frac{\sigma J}{2}\right) s\, dsd\theta$$

ここで

$$d\mu := \frac{s\, dsd\theta}{\pi r^2}$$

は $B_{|\Phi|}(p,r)$ 上の確率測度 (i.e. 全測度が 1) であるので，Jensen の不等式より，

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} \sinh^{-1}\left(\frac{\sigma J}{2}\right) s\, dsd\theta \leq \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{\sigma J}{2}\, s\, dsd\theta\right)$$

いま

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{\sigma J}{2}\, s\, dsd\theta = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{B_{|\Phi|}(p,r)} J\,\sigma d\zeta d\bar{\zeta}$$

であり，$J\sigma d\zeta d\bar{\zeta} = JdA(\sigma) = f^* dA(\rho)$ なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi r^2}\int_{B_{|\Phi|}(p,r)} J\,\sigma d\zeta d\bar{\zeta} &\leq \frac{1}{2\pi r^2}\int_{B_{|\Phi|}(p,r)} f^* dA(\rho) \\ &= \frac{1}{2\pi r^2}\int_{f(B_{|\Phi|}(p,r))} dA(\rho) \\ &\leq \frac{1}{2\pi r^2}\int_N dA(\rho) = \frac{\mathrm{Area}(N)}{2\pi r^2}\end{aligned}$$

となる．ただし，最後の不等号で $B_{|\Phi|}(p,r) \subset M$ が埋め込まれていることを利用した．したがって，主張を得る． □

Lemma 2.2. $N = (S,\rho)$ のガウス曲率 $K(\rho)$ は $K(\rho) \equiv -1$ を満たすとする．円盤 $B_{|\Phi|}(p,r)$ は Φ の零点を含まないとし，$B > 0$ とする．このとき，任意の点 $q \in B_{|\Phi|}(p,r)$ に対して，$G(q) \leq B$ が成り立つならば

$$G(p) < \frac{B}{\cosh r}$$

が成り立つ．

Proof. Proposition 1.4 により

$$\Delta_\sigma G = \frac{2}{\sigma}\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{4|\Phi|}{\sigma}\sinh G$$

なので

$$\Delta_{|\Phi|} G = 4\sinh G.$$

ここで，$B_{|\Phi|}(p,r)$ 上の natrual coordinate を $\zeta = (\xi,\eta)$ とおき，$B_{|\Phi|}(p,r)$ 上の関数 $F(\xi,\eta)$ を

$$F(\xi,\eta) = \frac{B}{\cosh r}\cosh\sqrt{2}\xi\cosh\sqrt{2}\eta$$

と定める．このとき，点 $(\xi,\eta)\in\partial B_{|\Phi|}(p,r)$ に対して $(\xi,\eta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくことで，

$$\begin{aligned}\cosh(\sqrt{2}r\cos\theta)\cosh(\sqrt{2}r\sin\theta) &= \frac{\cosh(\sqrt{2}r(\cos\theta+\sin\theta))+\cosh(\sqrt{2}r(\cos\theta-\sin\theta))}{2}\\ &= \frac{\cosh(2r\sin\alpha)+\cosh(2r\cos\alpha)}{2} \quad (\alpha=\theta+\frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

となる．ここで，$f_r(\alpha)=(\cosh(2r\sin\alpha)+\cosh(2r\cos\alpha))/2$ とおくと，f_r は周期 $\pi/2$ である．任意の $\alpha\in[0,\pi/2]$ に対して

$$\begin{aligned}f_r(\alpha) &= \frac{e^{2r\cos\alpha}+e^{2r\sin\alpha}+e^{-2r\cos\alpha}+e^{-2r\sin\alpha}}{4}\\ &\geq \frac{e^{r(\cos\alpha+\sin\alpha)}+e^{-r(\cos\alpha+\sin\alpha)}}{2}\\ &= \frac{e^{\sqrt{2}r\sin(\alpha+\pi/4)}+e^{-\sqrt{2}r\sin(\alpha+\pi/4)}}{2}\\ &\geq \frac{e^r+e^{-r}}{2}=\cosh r \qquad \left(\frac{\pi}{4}\leq\alpha+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

となる．したがって，$\partial B_{|\Phi|}(p,r)$ 上 $F(\xi,\eta)\geq B$ が成り立つ．さらに，直接計算で，$B_{|\Phi|}(p,r)$ 上

$$\Delta_{|\Phi|}F=\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)F=4F$$

が成り立つ．また，明らかに，$F(p)=B/\cosh r$ である．このとき，$B_{|\Phi|}(p,r)$ 上 $F\geq G$ となることが次のようにしてわかる：まず

$$\Delta_{|\Phi|}(F-G)=4F-4\sinh G\leq 4(F-G) \tag{2.2}$$

であることに注意する．(i) $F-G$ が内部の点 $p_0\in B_{|\Phi|}(p,r)$ で最小値を持つとする．このとき，

$$\Delta_{|\Phi|}(F-G)(p_0)\geq 0$$

したがって，(2.2) により，任意の点 $q\in B_{|\Phi|}(p,r)$ に対して

$$0\leq\Delta_{|\Phi|}(F-G)(p_0)\leq(F-G)(p_0)\leq(F-G)(q)$$

となるから，結論を得る．(ii) $F-G$ が $\partial B_{|\Phi|}(p,r)$ で最小値を持つとすると，$\partial B_{|\Phi|}(p,r)$ 上 $F\geq B$ である (したがって，$B_{|\Phi|}(p,r)$ 上 $F\geq B$ となる) ことと，仮定より $B_{|\Phi|}(p,r)$ 上 $G<B$ であることから

$$F-G\geq B-B\geq 0$$

となる．したがって，(i),(ii) いずれの場合も $B_{|\Phi|}(p,r)$ 上 $F\geq G$ となる．得られた不等式に p を代入することで主張を得る． □

Theorem 2.3. $K(\rho)\equiv -1$ とし，$f\colon M\to N$ を微分同相な調和写像とする．また，Φ を f の Hopf 微分として，任意の点 $p\in M$ に対して，

$$d:=d_{|\Phi|}(p):=\min\{\mathrm{inj}_{|\Phi|}(p),d_{|\Phi|}(p,Z(\Phi))\}$$

と定める．ただし，$Z(\Phi)$ は Φ の零点の集合である．このとき，任意の点 $p \in M$ に対して

$$G(p) < \frac{\sinh^{-1}(4|\chi(N)|/d^2)}{\cosh d} < \frac{2\sinh^{-1}(4|\chi(N)|/d^2)}{e^d}$$

が成り立つ．また，$f_t \colon M \to N_t$ を $t\Phi$ $(t > 0)$ を Hopf 微分としてもつような調和写像 f_t および双曲曲面 N_t の列とし，各 f_t に対する $\log(1/|\nu(t)|)$ を $G(t)$ とする．このとき

$$G(t)(p) \leq 2e^{-\sqrt{t}d} \sinh^{-1}(C/td^2).$$

参考文献

[Min92] Yair N Minsky. Harmonic maps, length, and energy in Teichmüller space. *Journal of Differential Geometry*, 35(1):151–217, 1992.