

Epstein-Marden セミナーノート

坂井 健人

2024年3月22日

概要

このノートは Epstein-Marden のセミナー用のノートです。佐々木計量という、下部の多様体の計量から自然に定まる接束上のリーマン計量があります。[CME06] の II.2.6 節から登場するベクトル場に対する “classical lipschitz 定数” という概念、およびその基本事項は、II.Appendix.1 節に (暗に) 登場します。しかし、本の中では、その計量が「佐々木計量」と呼ばれていることに言及がなく、文献等に苦労しました。これについては、[GHL⁺90] に簡単な記述があり、また Math stackexchange の記事 [FSN21] が参考になりました。

1 接続，平行移動

この節では、接続や平行移動など微分幾何的なことを速習する。

M を C^∞ 級多様体とする。 M 上の **アフィン接続 (affine connection)** とは、以下の条件を満たす \mathbb{R} -線形写像 $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ である：任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して、

- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$ (i.e. 第1成分に関する $C^\infty(M)$ -線形性があり)、
- $\nabla_XfY = (Xf)Y + f\nabla_XY$ (i.e. ライブニッツルール)

が成り立つ。慣例により、 $\nabla(X, Y)$ を ∇_XY で表す。第1成分に関する $C^\infty(M)$ -線形性から、接続は第1成分については、各点での作用素 $T_pM \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow T_pM$ に制限することができる。

リーマン多様体 (M, g) に対しては、つぎの条件を満たす **リーマン接続 (Riemann connection)** と呼ばれる接続が一意的に存在する：任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、

- $Zg(X, Y) = g(\nabla_ZX, Y) + g(X, \nabla_ZY)$ (i.e. 計量と両立的)、
- $\nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y] = 0$ (i.e. 捩れ無し)

が成り立つ。 I を開区間、 $c: I \rightarrow M$ を滑らかな曲線とする。 c に沿ったベクトル場 $X(t)$ とは、各時刻 $t \in I$ に対して、点 $c(t)$ での接空間の元を指定するものである：

$$I \ni t \mapsto X(t) \in T_{c(t)}M.$$

より formal に言えば、引き戻し束 c^*TM への c 上の切断である。 c に沿ったベクトル場を $\mathfrak{X}(M|_c)$

と表そう。曲線 c に沿った**共変微分 (covariant derivative)** とは、線形写像

$$\frac{D}{dt}: \mathfrak{X}(M|_c) \rightarrow \mathfrak{X}(M|_c)$$

であって、任意の関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ と $X \in \mathfrak{X}(M|_c)$ に対して、

- $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}X$ が成り立つ。また、
- $X \in \mathfrak{X}(M|_c)$ が M 上のベクトル場 \tilde{X} に拡張できる (i.e. $\tilde{X}_{c(t)} = X(t)$ となる) とき、

$$\frac{D}{dt}X(t) = \nabla_{c'(t)}\tilde{X}$$

が成り立つときにいう。こちらも、formal にいうなら、曲線 c に沿った共変微分とは、引き戻し接続 $c^*\nabla$ に他ならない。曲線 c に沿ったベクトル場 $X(t)$ が c に沿って**平行 (parallel)** であるとは

$$\frac{D}{dt}X(t) = 0 \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つときにいう。

$t_0 \in I$ とベクトル $v \in T_{c(t_0)}M$ を固定する。このとき、 c に沿ったベクトル場 $X_v(t)$ であって、 $X_v(t_0) = v$ かつ X は c に沿って平行であるようなものがただ一つ存在する。したがって、任意の時刻 $t_1 \in I$ および $v \in T_{c(t_0)}M$ に対して、次の対応

$$(P_c)_{t_0}^{t_1}: T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M; v \mapsto X_v(t_1)$$

を考えることができる。この写像を c に沿った v の ($c(t_1)$ への) **平行移動 (parallel translation)** という。 $(P_c)_{t_0}^{t_1}$ は線形同型写像 (リーマン接続の場合にはノルムを保つ) であり、 $(P_c)_{t_1}^{t_2} \circ (P_c)_{t_0}^{t_1} = (P_c)_{t_0}^{t_2}$ となることがわかる。共変微分と平行移動の間には次のような関係がある：

$$\frac{D}{dt}X(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P_c)_{t_0+h}^{t_0}X(t_0) - X(t_0)}{h}. \quad (1.1)$$

2 接束の水平方向と垂直方向への分解

$\pi: TM \rightarrow M$ を接束の射影とする。 $p \in M$ とし、 $X_p \in T_pM \subset TM$ に対して、 π の X_p での微分

$$\pi_{*,X_p}: T_{X_p}TM \rightarrow T_pM$$

を考える。 $V_{X_p} := \ker(\pi_{*,X_p})$ を X_p のファイバー $T_{X_p}TM$ の**垂直成分 (vertical component)** という。垂直成分 V_{X_p} は、包含写像 $i: T_pM \rightarrow TM$ により誘導される微分写像 $i_{*,X_p}: T_{X_p}(T_pM) \cong T_pM \rightarrow T_{X_p}TM$ の像と、 $\pi \circ i = \text{id}_{T_pM}$ であるから、一致する。

Definition 2.1. ベクトル $v \in T_{X_p}TM$ が**水平 (horizontal)** であるとは、次の条件を満たすときにいう： $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) とする。ある曲線 $c: I \rightarrow M$ と TM への曲線 $E: I \rightarrow TM$ が存在して、

$$c(0) = p, c'(0) = \pi_{*,X_p}(v), E(0) = X_p, E'(0) = v$$

を満たし、さらに E は c に沿って平行なベクトル場である。

$T_{X_p}TM$ における水平なベクトル全体の集合を H_{X_p} と定め、**水平成分 (horizontal component)** という $(U, (x^1, \dots, x^n))$ を M の局所座標とする。 (x^1, \dots, x^n) は TM の局所自明化を与える。 T_pM ($p \in U$) のベクトル (p, v) は次のように座標付けされる：

$$T_pM \ni (p, v) = \sum_{i=1}^n X^i(p, v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \leftrightarrow (x^1(p), \dots, x^n(p), X^1(p, v), \dots, X^n(p, v)). \quad (2.1)$$

つまり、 $(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n)$ は $TM|_U$ 上の局所座標と見做せる。 この座標を用いて、 $T_{X_p}TM$ は $(\partial/\partial x^1)_{X_p}, \dots, (\partial/\partial x^n)_{X_p}, (\partial/\partial X^1)_{X_p}, \dots, (\partial/\partial X^n)_{X_p}$ の一次結合でかける。 つまり任意の $v \in T_{X_p}TM$ に対して

$$v = \sum_i v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X_p} + \sum_j \theta^j \left(\frac{\partial}{\partial X^j} \right)_{X_p} \quad (v^i \in \mathbb{R}, \theta^j \in \mathbb{R}).$$

したがって、 $T_{X_p}TM$ は $(v^1, \dots, v^n, \theta^1, \dots, \theta^n)$ たちで、座標付けされている。

この座標により、水平成分と垂直成分を特徴付けする。 π は座標 $(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n)$ と (x^1, \dots, x^n) の間に

$$(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

という写像を誘導するので、微分 π_{*, X_p} は

$$\pi_{*, X_p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X_p} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad \pi_{*, X_p} \left(\frac{\partial}{\partial X^i} \right)_{X_p} = 0 \quad (2.2)$$

を満たす線形写像である。 また、包含写像 $i: T_pM \rightarrow TM$ が誘導する同型 $i_{*, X_p}: T_pM \rightarrow T_{X_p}(T_pM) \rightarrow V_{X_p}$ は

$$\begin{aligned} v &:= \sum_i X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \\ &\rightarrow \left. \frac{d}{dt} (X_p + tv) \right|_{t=0} \\ &\rightarrow \sum_i \left. \frac{d(x^i \circ c_v)}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X_p} + \sum_j \left. \frac{d(X^j \circ c_v)}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial X^j} \right)_{X_p} \\ &\quad (c_v(t) = X_p + tv \text{ とおいた}) \\ &= \sum_i X^i \left(\frac{\partial}{\partial X^j} \right)_{X_p} \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。

さて、まず (2.2) により、

$$v \text{ が垂直} \Leftrightarrow v^i = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

がわかる。つぎに v が水平のときを考える。いま、曲線 $c: I \rightarrow M$ と c に沿って平行なベクトル場 $E: I \rightarrow M$ が存在して、(2.1) を満たしている。

$$E(t) = \sum_i E^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)}, \quad E(0) = X_p = \sum_i X_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

とおいておこう。つまり、 $E^i(0) = X_p^i$ である。座標表示すると

$$E(t) = (x^1 \circ c(t), \dots, x^n \circ c(t), E^1(t), \dots, E^n(t))$$

であるから

$$v = E'(0) = \sum_i \left. \frac{d(x^i \circ c)}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X_p} + \sum_j \left. \frac{dE^j}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial X^j} \right)_{X_p}$$

となる。すなわち、 $d(x^i \circ c)/dt|_{t=0} = v^i$ 、 $dE^j/dt|_{t=0} = \theta^j$ ($1 \leq i, j \leq n$) である。ここで、 E は c に沿って平行であることから

$$0 = \frac{D}{dt} E(t) = \sum_k \left(\frac{dE^k}{dt} + \frac{d(x^i \circ c)}{dt} E^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{c(t)} \quad (2.4)$$

を得る。ここに、 $t = 0$ を代入して

$$v \text{ が水平} \Leftrightarrow \theta^k + \sum_{i,j} v^i X_p^j \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

を得る。したがって、 H_{X_p} は n 次の線形部分空間であることがわかり、

$$T_{X_p} TM = V_{X_p} \oplus H_{X_p}$$

と直和に分解されることがわかる。また、 $\pi_{*, X_p}: H_{X_p} \rightarrow T_p M$ は同型を誘導する。

Definition 2.2. $T_{X_p} TM$ 上に、

$$\tilde{g}_{X_p}(v, w) = g_p(\pi_{*, X_p} v_H, \pi_{*, X_p} w_H) + g_p(\Phi v_V, \Phi w_V) \quad (v, w \in T_{X_p} TM)$$

で内積を定める。ここで、 $\Phi = (i_{*, X_p})^{-1}$ である。 TM 上の計量 $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{X_p}\}_{X_p \in TM}$ を **佐々木計量 (Sasaki metric)** という。

最後に、垂直方向への射影の公式を与えておく。 $v = \sum_i v^i (\partial/\partial x^i)_{X_p} + \sum_j \theta^j (\partial/\partial X^j)_{X_p}$ であるとき、

$$\begin{aligned} v_H &= \sum_i v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X_p} - \sum_k \left(\sum_{i,j} v^i X_p^j \Gamma_{ij}^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial X^k} \right)_{X_p} \\ v_V &= \sum_k \left(\sum_{i,j} \theta^k + v^i X_p^j \Gamma_{ij}^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial X^k} \right)_{X_p} \end{aligned}$$

となるので, (2.4) と同様の計算をし, (2.3) を考えれば,

$$\Phi(v_V) = \frac{D}{dt}E(0) \quad (2.5)$$

となることがわかる.

Proposition 2.3. $c: [0, 1] \rightarrow M$ を曲線とし, $E: [0, 1] \rightarrow TM$ を c に沿ったベクトル場とする. このとき,

$$\text{length}_{TM}(E)^2 \geq \text{length}(c)^2 + \|(P_c)_1^0 E(1) - E(0)\|_M^2$$

が成り立つ.

Proof. E は一定速度にパラメトライズされていると仮定してよい. このとき,

$$\begin{aligned} \text{length}_{TM}(E)^2 &= \int_0^1 \|E'(t)\|_{TM}^2 dt && \text{(Cauchy-Schwarz の等号)} \\ &= \int_0^1 \|E'(t)_H\|_{TM}^2 + \|E'(t)_V\|_{TM}^2 dt && \text{(佐々木計量の定め方)} \\ &= \int_0^1 \|\pi_* E'(t)\|_M^2 + \left\| \frac{D}{dt}E(t) \right\|_M^2 dt && \text{((2.5) の計算より)} \end{aligned}$$

ここで, 曲線 $\nu: [0, 1] \rightarrow T_p M \subset TM$ を $\nu = (P_c)_t^0 \circ E(t)$ で定めると ν は $E(0)$ と $(P_c)_1^0 E(1)$ を結ぶ path であり, (1.1) により

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D}{dt}E(t) \right\|_{M,c(t)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \|(P_c)_{t+h}^t E(t) - E(t)\|_{M,c(t)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \|(P_c)_{t+h}^0 E(t) - (P_c)_t^0 E(t)\|_{M,c(0)} \\ &= \|\nu'(t)\|_{M,c(0)} \end{aligned}$$

を得る. ゆえに,

$$\begin{aligned} \text{length}_{TM}(E)^2 &= \int_0^1 \|(\pi \circ E)(t)\|_M^2 dt + \int_0^1 \|\nu'(t)\|_{M,c(0)}^2 dt \\ &= \int_0^1 \|c(t)\|_M^2 dt + \int_0^1 \|\nu'(t)\|_{M,c(0)}^2 dt \\ &\geq \text{length}_M(c)^2 + \text{length}_{T_{c(0)}M}(\nu)^2 \\ &\geq \text{length}_M(c)^2 + \|(P_c)_1^0 E(1) - E(0)\|_M^2 \end{aligned}$$

となるので, 結論を得る. □

Proposition 2.4. 任意の $u, v \in TM$ と, $\pi u \in M$ から, $\pi v \in M$ を結ぶ任意の path $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ に対して,

$$\text{length}_M(\gamma)^2 + \|(P_\gamma)_0^1 u - v\|^2 \geq d_{TM}(u, v)^2$$

が成り立つ.

Proof. パラメータを取り替えることで、曲線 $\gamma(t)$ は速さ一定であるとしてよい。ベクトル $u \in T_{\pi u}M$ を時刻 t まで平行移動することで得られる γ に沿ったベクトル場 $X(t) = (P_\gamma)_0^t u \in T_{c(t)}M$ をとる。このとき、 $X: [0, 1] \rightarrow TM$ とみなせば、 X は TM 内の path であり、 $u \in T_{\pi u}M$ と $(P_\gamma)_0^1 u \in T_{\pi v}M$ を結んでいる。また、

$$Y(t) = (1-t)(P_\gamma)_0^1 u + tv \in T_{\pi v}M$$

と path $Y: [0, 1] \rightarrow T_{\pi v}M \subset TM$ を得る。これは、 $(P_\gamma)_0^1 u$ と v を結ぶ path である。ここで、 X と Y の path の合成 $X + Y: [0, 2] \rightarrow TM$ を考える。このとき、

$$\begin{aligned} d_{TM}(u, v)^2 &\leq \text{length}_{TM}(X + Y)^2 \\ &= \left(\int_0^2 \|(X + Y)'(t)\| dt \right)^2 \\ &\leq \int_0^2 \|(X + Y)'(t)\|^2 dt && \text{(コーシーシュワルツの不等式)} \\ &= \int_0^1 \|X'(t)\|^2 dt + \int_1^2 \|Y'(t)\|^2 dt \\ &= \text{length}_M(\gamma)^2 + \|v - (P_\gamma)_0^1 u\|^2 \end{aligned}$$

となるから結論を得る。 □

3 ベクトル場の Lipschitz 性

Definition 3.1. $L > 0$ とする。ベクトル場 $X: M \rightarrow TM$ がパスの意味で L -lipschitz (L -lipschitz in the path sense) であるとは、任意の path γ に対して

$$\text{length}_{TM}(X \circ \gamma) \leq L \text{length}(\gamma)$$

が成り立つときにいう。また、定数

$$k = \sup_{\gamma: \text{path}} \frac{\text{length}(X \circ \gamma)}{\text{length} \gamma}$$

を **path-lipschitz 定数 (path-lipschitz constant)** という。

Definition 3.2. X を M 上のベクトル場とする。定数

$$K := \sup_{\gamma: [0,1] \rightarrow M} \frac{\|(P_\gamma)_0^1 X(\gamma(0)) - X(\gamma(1))\|}{\text{length}(\gamma)}$$

を **classical lipschitz 定数 (classical lipschitz constant)**

Lemma 3.3. X をベクトル場とする。

- (1) ベクトル場 X がパスの意味で lipschitz であることと, X の classical lipschitz 定数が有限であることは同値である.
- (2) K をベクトル場 X の classical lipschitz 定数とする. このとき, X の path lipschitz 定数は $\sqrt{K^2 + 1}$ である.
- (3) classical lipschitz 定数における上限は geodesic 全体を走らせることによって得られる.

Proof. X を M 上のベクトル場とし, k を X の path-lipschitz 定数とする. また, γ を M 上の rectifiable な path とする. 仮定から

$$\text{length}_{TM}(X \circ \gamma) = k \text{ length}(\gamma)$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned} k^2(\text{length } \gamma)^2 &\geq \text{length}_{TM}(X \circ \gamma)^2 \\ &\geq \|(P_\gamma)_0^1 X(\gamma(0)) - X(\gamma(1))\|^2 + (\text{length } \gamma)^2 \quad (\text{Proposition 2.3}) \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$\sqrt{k^2 - 1} \geq \frac{\|(P_\gamma)_0^1 X(\gamma(0)) - X(\gamma(1))\|}{\text{length}(\gamma)}$$

となるので, (1) の \Rightarrow が示せた.

次に K をベクトル場 X の classical lipschitz constant とする. また, α を 2 点 $x, y \in M$ を結ぶ最短測地線 ($\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$) とする. このとき, Proposition 2.4 より

$$d(X(x), X(y))^2 \leq \|(P_\alpha)_0^1 X(x) - X(y)\|^2 + d(x, y)^2$$

が成り立つ. ここで, 定数 K_0 を

$$K_0 = \sup_{\gamma: [0,1] \rightarrow M, \text{geodesic}} \frac{\|(P_\gamma)_0^1 X(\gamma(0)) - X(\gamma(1))\|}{\text{length}(\gamma)}$$

で定める. K_0 が有限値であるとしよう. $\beta: [0, 1] \rightarrow M$ を任意の rectifiable path とし, $T = [0 = t_0 < \dots < t_N = 1]$ を任意の区間の分割とする. このとき

$$\sum_{i=1}^N d(X(\beta(t_i)), X(\beta(t_{i+1}))) \leq \sum_{i=1}^N \{ \|(P_{\beta_i})_{t_i}^{t_{i+1}} X(\beta(t_i)) - X(\beta(t_{i+1}))\|^2 + d(\beta(t_i), \beta(t_{i+1}))^2 \}^{1/2}$$

である. ここで, β_i は $\beta(t_i)$ と $\beta(t_{i+1})$ を結ぶ最短測地線とする. $d(\beta(t_i), \beta(t_{i+1}))^2$ を括り出すことで

$$(\text{R.H.S}) \leq \sqrt{K_0^2 + 1} \cdot \sum_{i=1}^N d(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) \leq \sqrt{K_0^2 + 1} \cdot \text{length}(\beta)$$

を得る. よって, $X \circ \beta$ が rectifiable な path となるとき, $\text{length}(X \circ \beta) \leq \sqrt{K_0^2 + 1} \cdot \text{length } \beta$ を得る. ゆえに,

$$k^2 \leq K_0^2 + 1 \leq K^2 + 1 \leq k^2$$

となるので, $k = \sqrt{K^2 + 1}$ より, (2) および (1) の \Leftarrow が従う. また, $K = K_0$ より (3) が従う. \square

4 共変微分のノルムと Lipschitz 定数

Theorem 4.1. リーマン多様体 M の凸な開集合 $U \subset M$ と U 上の C^1 級ベクトル場 X に対して、 X の classical Lipschitz 定数を K とする。このとき

$$K = \sup \{ \|\nabla_v X\| \mid v \in TU, \|v\|_M = 1 \}$$

が成り立つ。

Proof. 仮定より、任意の 2 点 $x, y \in U$ に対して、 x と y を結ぶ geodesic $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ が存在する。 $s = d(x, y)$ とおく。 γ は速度 s 一定でパラメトライズされているとしてよい。

$$\begin{aligned} \|(P_\gamma)_0^1(X \circ \gamma)(0) - (X \circ \gamma)(1)\| &\leq \int_0^1 \left\| \frac{D}{dt}(X \circ \gamma)(t) \right\| dt \\ &= \int_0^1 \|\nabla_{\gamma'(t)} X\| dt && (X \text{ は } X \circ \gamma(t) \text{ の拡張}) \\ &= s \int_0^1 \|\nabla_{\gamma'(t)/s} X\| dt \\ &\leq s \max_{t \in [0,1]} \{ \|\nabla_{\gamma'(t)/s} X\| \} \\ &\leq s \sup_{\|v\|=1} \{ \|\nabla_v X\| \} && (\gamma'(t)/s \text{ のノルムは } 1) \end{aligned}$$

となるので主張を得る。 □

5 Standard vector field

α を \mathbb{H}^2 上の向きづけられた測地線とする。 α に対して、 $G(\alpha), E(\alpha)$ という 2 つの \mathbb{H}^2 上のベクトル場を定める。 まず、 $E(\alpha)$ は α の equidistant curve に接するベクトル場で、各ベクトルの大きさは 1 であるものとする。 また、 $G(\alpha)$ は $E(\alpha)$ を時計回りに $\pi/2$ 回転させて定まるベクトル場とする (図 1)。 すなわち、 $R: T\mathbb{H}^2 \rightarrow T\mathbb{H}^2$ を時計回りに $\pi/2$ 回転させる作用とすると $G(\alpha) = R(E(\alpha))$ となる。 いま、 $G(\alpha)$ は α に直交する測地線の単位接ベクトル場になっている。 また、 $t: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を α からの向きづけられた距離を表す関数とし、符号は $G(\alpha)$ の向きと協調的になるようにとるものとする。

ここまでの議論を α の端点が同じ無限遠点に飛んでいる (i.e. α が一点に潰れている) ような状況にも適用する。 この場合、 $E(\alpha)$ は α を中心として持つようなホロサイクルに接する単位ベクトル場になり、 $G(\alpha)$ は α に漸近していくような測地線に接する単位ベクトル場になる。 α を中心に持つようなホロサイクルを一つ固定して、そこからの符号付き距離を表す関数を $x: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 先ほどと同様に、符号は $G(\alpha)$ の向きと協調的になるように取る。

Proposition 5.1. $E(\alpha), G(\alpha)$ を単に E, G とかくことにする。

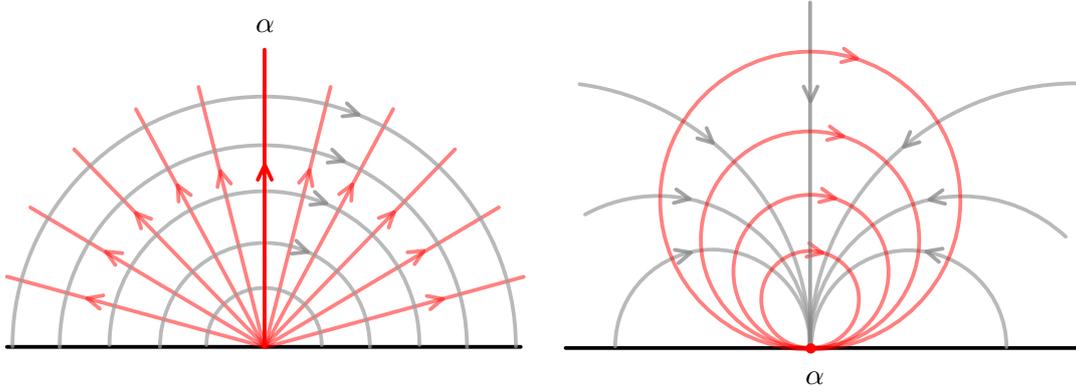


図1 左: α が測地線の場合, 右: α が無限遠点にある場合, 赤色が G , 灰色が E

- (1) $\nabla_G G = \nabla_G E = 0$.
- (2) α が測地線の場合, $[G, \cosh t \cdot E] = 0$ であり,
 α が一点に潰れている場合は $[G, e^x E] = 0$.
- (3) α が測地線の場合, $\nabla_E E = -\tanh t \cdot G$ かつ $\nabla_E G = \tanh t \cdot E$ であり,
 α が一点に潰れている場合は $\nabla_E E = -G$ かつ $\nabla_E G = E$.
- (4) α が測地線の場合, α の $|t|$ -近傍での, E と G の classical Lipschitz 定数は $|\tanh t|$ であり,
 α が一点に潰れている場合は 1.
- (5) α の $|t|$ -近傍での, $\cosh t \cdot E$ の classical Lipschitz 定数は $|\sinh t|$.
- (6) $v \in T\mathbb{H}^2$ と定数 a, b に対して, $\nabla_v(aE + bG) = \langle v, E \rangle \tanh t(-aG + bE)$.

Proof. とりあえず, α が測地線である状況のみを考える. 双曲平面に座標を入れてしまって, ゴリゴリ計算するという方針で示そう. いま, \mathbb{H}^2 上には E と G による積分曲線により, “野線” が引かれている状況である. 1 マス分の大きさが双曲距離からくるような座標を (t, s) と表すことにする. ただし, t を E に沿った軸, s を G に沿った軸とする. この座標に関して, 双曲計量を表示すると $dt^2 + \cosh^2 t ds^2$ となる.

(1) G の積分曲線 γ は測地線に他ならない. したがって, 測地線の定義より, $\nabla_G G = \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ である. また, 局所座標表示より, $G = \partial/\partial t, E = (\cosh t)^{-1}(\partial/\partial s)$ と与えられる. これらは \mathbb{H}^2 上の正規直交枠をなす. $e_1 = G, e_2 = E$ とおこう. θ^1, θ^2 を e_1, e_2 それぞれに対する双対枠とする. すると,

$$\theta^1 = dt, \theta^2 = \cosh t ds \quad \therefore d\theta^1 = 0, d\theta^2 = \sinh t dt \wedge ds.$$

正規直交枠 (s, t) に関する接続行列を $[\omega_j^i]$ ($i = 1, 2, j = 1, 2$) とすると, これは歪対称で ω_2^1 のみを求めれば, ω は求まる. いま, 接続は捩れ無しなので,

$$0 = d\theta^1 + \omega_2^1 \wedge \theta^2, \quad 0 = d\theta^2 + \omega_1^2 \wedge \theta^1$$

となるので, $\omega_2^1 = -\sinh t ds$ がわかる. ゆえに, $\nabla_G E = \nabla_{e_1} e_2 = \omega_2^1(e_1)e_2 = 0$.

(2) 有名な事実として、座標からくるベクトル場たちのリーブラケットは消失する。 $G = \partial/\partial t, E \cdot \cosh t = \partial/\partial s$ なので、主張を得る。

(3) 捩れ無し条件から、任意のベクトル場 X, Y に対して、 $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ である。ゆえに

$$\cosh t \cdot \nabla_E G = \nabla_{\cosh t \cdot E} G = \nabla_G(\cosh t \cdot E) = \sinh t \cdot E$$

を得る。また

$$\nabla_E E = \nabla_{e_2} e_2 = \omega_2^1(e_2)e_1 = -\sinh t \cdot (\cosh t)^{-1} \partial/\partial t = -\tanh t \cdot G$$

である。

(4) v を単位ベクトルとして、 $\nabla_v E = \nabla_{\cos \theta \cdot G + \sin \theta \cdot E} E = \sin \theta \cdot \nabla_E E = -\sin \theta \cdot \tanh t \cdot G$ であるから、 E についてはよい。 $\nabla_v G = \cos \theta \cdot \nabla_E G = \cos \theta \tanh t \cdot E$ なので、 G についてもよい。

(5) 計算により

$$\nabla_E(\cosh t \cdot E) = \sinh t \cdot G, \quad \nabla_G(\cosh t \cdot E) = \sinh t \cdot E$$

がわかる。Theorem 4.1 により、単位ベクトル $v = \cos \theta \cdot E + \sin \theta \cdot G$ に対して、

$$\|\nabla_v(\cosh t \cdot E)\| = |\sinh t| \|\cos \theta \cdot G + \sin \theta \cdot E\| = |\sinh t|$$

となるので、結論を得る。

(6) $\nabla_{cE+dG}(aE+bG) = ca\nabla_E E + cb\nabla_E G + da\nabla_G E + db\nabla_G G = -ca \tanh t \cdot G + cb \tanh t \cdot E = c \tanh t \cdot (-aG + bE) = \langle cE + dG, E \rangle \tanh t \cdot (-aG + bE)$ より。 \square

Corollary 5.2. β, γ を同じ向きを持った (つまり、ある測地線がこれらと交わるならば、交点の符号が等しい) 互いに交わらない測地線とする。 v, w を、それぞれ $x \in \beta, w \in \gamma$ で接する、 β, γ の単位接ベクトルとする。また、 v' を v を x と y を結ぶ測地線分に沿って y まで平行移動したベクトルとする。このとき、

$$\|v' - w\| \leq d(x, y)$$

が成り立つ。

Proof. ある (1 点に退化しているかもしれない) 測地線 α が存在して、 v, w はそれぞれ、 $G(\alpha)$ のある点での値となる。ゆえに、 Proposition 5.1 と Theorem 4.1 により、結論を得る。 \square

6 Extending a lamination to a pair of orthogonal foliation

前節では、無限遠境界から S_ϵ への nearest point retraction に沿った射影の、一様な歪曲度、および Lipschitz 定数を求めた。

ここからは、 S_ϵ から S への自然な同相写像を構成していく。いま、 S には bending lamination という lamination が載っていた。この lamination の近傍上に lamination の拡張のなるような

foliation を構成するのが、本節の目的である。自然な同相写像を構成するために、この foliation を利用するのである。?? (Isometry to the hyperbolic plane) (Corollary II.1.12.7 [CME06]) により、 S は \mathbb{H}^2 と等長的であったので、bending lamination を \mathbb{H}^2 上の geodesic lamination とみなし、議論する。

\mathcal{L} を \mathbb{H}^2 上の geodesic lamination とし、正の定数 μ を $\mu < (\log 3)/2$ を満たすように取る。 $(\log 3)/2$ という定数は理想三角形の中心から、各辺までの距離に等しい。Lamination \mathcal{L} の μ 近傍に foliation を構成する。 C を $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{L}$ の連結成分の一つとする。 C は、(高々) 可算本の測地線で囲まれた領域である。このとき、つぎのことが成り立つ。

Corollary 6.1. l_1, l_2, l_3 を C の境界の連結成分であるような相異なる測地線とする。このとき、 $z \in C$ に対して、 $d(z, l_2) \leq \sinh^{-1}(e^{-\mu})$ かつ $d(z, l_3) \leq \sinh^{-1}(e^{-\mu})$ *1 ならば、 $d(z, l_1) > \mu$ である。

C の境界の連結成分であるような測地線 β に対して、 β の μ 近傍を U_μ と表す。Corollary 6.1 により、 $U_\mu \cap C$ は次の三つのタイプ集合に分割できる： γ を β とは異なる C の境界の連結成分であるような測地線とする。

$$\begin{aligned} U_1(\beta, \gamma) &= \{z \in C \mid d(z, \beta) \leq \mu \text{ かつ } d(z, \gamma) \leq \mu\} \\ U_2(\beta) &= \{z \in C \mid d(z, \beta) \leq \mu \text{ かつ } d(z, \mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{L}) \geq \sinh^{-1}(e^{-\mu})\} \\ U_3(\beta, \gamma) &= \{z \in C \mid d(z, \beta) \leq \mu \text{ かつ } \mu \leq d(z, \gamma) \leq \sinh^{-1}(e^{-\mu})\} \end{aligned}$$

このとき、 C の境界の連結成分であるような異なる測地線 γ, γ' を取ると、 $U_3(\beta, \gamma) \cap U_3(\beta, \gamma') = \emptyset$ である。すなわち

$$U_2(\beta) = U_\mu \setminus \left(\bigsqcup_{\gamma \neq \beta} N(\gamma, \sinh^{-1}(e^{-\mu})) \right)$$

ということである。ここで、 $N(\gamma, \sinh^{-1}(e^{-\mu}))$ は γ の $\sinh^{-1}(e^{-\mu})$ 近傍を表している。

U_μ 上に foliation を作るために、 U_μ 上に line field を構成する。そのために、 U_μ 上のベクトル場を定める。まず、 β と γ に直交する測地線 α を考える。 β には、向きを入れておき、 γ はそれに協調する向きを入れる。また、 α には、それらの向きを時計回りに $\pi/2$ 回転させた向きを入れる。 $U_1(\beta, \gamma)$ 上を、 β, γ と向きが協調的であるような α と直交する測地線で foliate する。そして、これらの測地線の単位接ベクトルを $U_1(\beta, \gamma)$ 上のベクトル場 G とする。つぎに、 $U_2(\beta)$ 上にベクトル場を定める。ここは β の equidistant curve (β の向きにより向きづけられたもの) で foliate しておいて、それらの単位接ベクトルとして、ベクトル場 E を設定する。最後に、 $U_3(\beta, \gamma)$ であるが、ここは、ここまで定めた二つのベクトル場の“のり代”にあたる。

関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq \mu) \\ \text{linear} & (\mu \leq t \leq \sinh^{-1}(e^{-\mu})) \\ 0 & (t \geq \sinh^{-1}(e^{-\mu})) \end{cases}$$

*1 \sinh^{-1} は \sinh の逆関数を表している。 \sinh の逆数ではない。

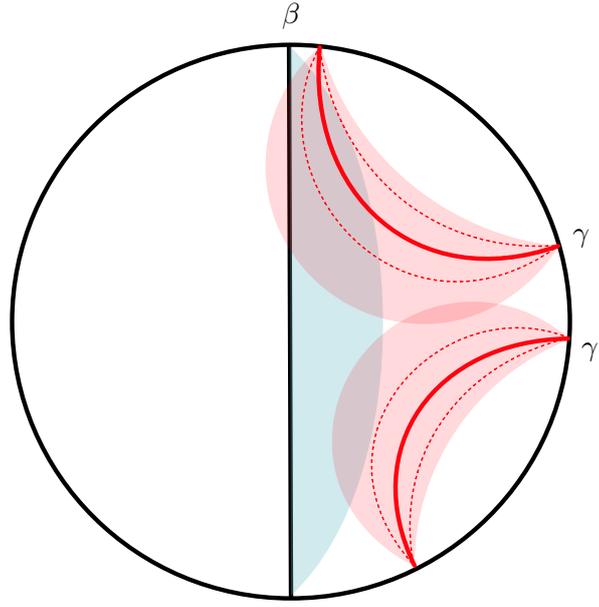


図2 $U_2(\beta)$ の図, 青い領域が β の μ 近傍 U_μ , 赤い点線は μ -distant curve を表し, 赤い領域は, 赤い測地線の $\sinh^{-1}(e^{-\mu})$ 近傍を表す.

と定める. 点 $z \in U_3(\beta, \gamma)$ に対して, ベクトルを

$$\phi(d(z, \gamma))G(z) + (1 - \phi(d(z, \gamma)))E(z)$$

とおくことで, U_2 上のベクトル場 E と U_1 上のベクトル場 G を連続的に繋ぐ (図 3).

この構成をほかの連結成分 C に渡って, いっせいにすることで, U_μ 上の line field を得ることができる. そして, この line field の解となる foliation を \mathcal{L}_μ で表す. 全ての連結成分における境界成分の測地線の向きを協調的に取ることはできないので, ベクトル場を得ることはできないことに注意する.

この構成は β と γ が端点を共有しているときも, 広い意味で可能なことに注意する. この場合 α は, 共有している無限遠点に退化しているとみなし, 「 α に直交する測地線」は「 α を端点を持つ測地線」に置き換わる.

7 Lipschitz line fields in the hyperbolic plane

前節で出てきた関数 Φ の線形区間での傾きを

$$A = \frac{1}{\sinh^{-1}(e^{-\mu}) - \mu}$$

とおく.

Proposition 7.1. \mathcal{L} に属する測地線のうち, 最も近いものとの距離が高々 t であるような領域を

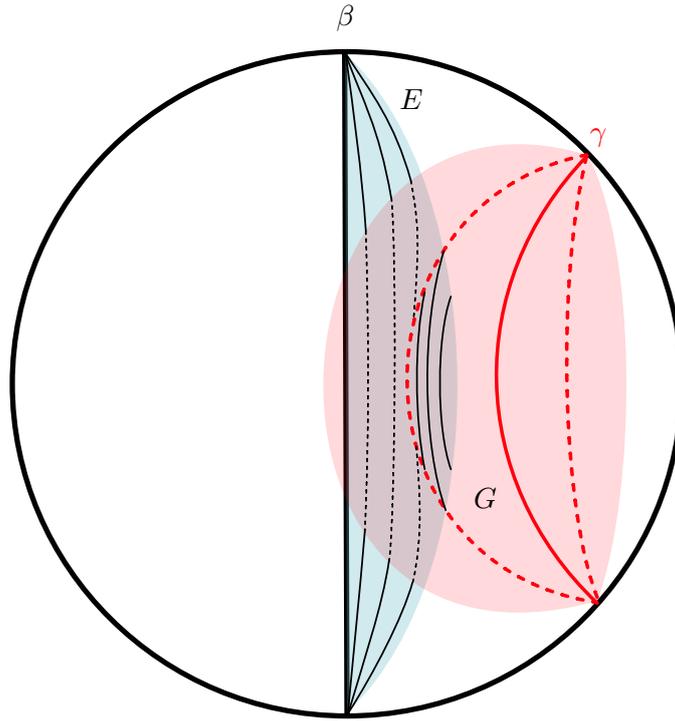


図3 β と γ を正規化した状態の図

考える. この領域上で, \mathcal{L}_μ に接する (unit) line field の, classical lipschitz 定数は高々

$$k(t) := \frac{2 + 4 \tanh t + 4A \sin(t/2)(1 + \sin(t/2)) + \frac{\sin t}{1 + e^{-2t}}}{1 + \cos t}$$

である. $t = \mu$ を代入することで, U_μ 上の一様な classical lipschitz 定数の評価を得る. また, \mathcal{L} に属する 2 本の測地線からの距離がともに μ より小さい領域では, その classical lipschitz 定数は高々 1 である.

Remark 7.2. この命題における classical lipschitz 定数 $k(t)$ は $1 + 4t$ だと容易に証明できるし, ある種の Sullivan の定理を証明するためには, どのような上界でも, かまわない. が, 上の定数には指数が登場するので, 数値評価として差が大きい.

まず, line field に対する classical lipschitz 定数というのは何かを説明する.

Claim 7.3. Classical lipschitz 定数というのは, 局所的な量である. すなわち, M をリーマン多様体, $\{U_\lambda\}$ を M の開被覆とし, X を classical lipschitz 定数 K が有限なベクトル場とする. このとき

$$K = \sup_{\lambda} \{K|_{U_\lambda}\}$$

が成り立つ.

Proof of Claim 7.3. Lemma 3.3 より, classical lipschitz 定数の定義

$$\sup_{\gamma: [0,1] \rightarrow M} \frac{\|(P_\gamma)_0^1 X(\gamma(0)) - X(\gamma(1))\|}{\text{length}(\gamma)}$$

における γ は測地線全体を走らせて考えればよい. 任意の測地線 γ に対して, 十分細かく区間を分割すれば, $\gamma_i := \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_\lambda$ となるようにできる. したがって

$$\begin{aligned} \|(P_\gamma)_0^1 X(\gamma(0)) - X(\gamma(1))\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|(P_\gamma)_{t_i}^{t_{i+1}} X(\gamma(t_i)) - X(\gamma(t_{i+1}))\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} K|_{U_{\lambda_i}} \cdot \text{length}(\gamma_i) \\ &\leq \sup_{\lambda} \{K|_{U_\lambda}\} \cdot \text{length}(\gamma) \end{aligned}$$

となるので, 結論を得る (一つ目の不等号は若干注意が必要). \square

いま, line field には向きを大域的に入れることはできないが, 局所に制限すれば, 向きを入れることは可能である. この意味で, 局所的に見て向きを入れ, ベクトル場とみなしたときの classical lipschitz 定数を, line field に対する classical lipschitz 定数とする.

Proof. U_μ は U_1 から U_3 の3つのタイプの領域に分割され, 各タイプの領域の上では, \mathcal{L}_μ に接する line field は滑らかである. したがって, 各タイプの領域の内部 (これは convex) での classical lipschitz 定数は Theorem 4.1 により, 共変微分によるノルムで評価できるので, ここから考えよう.

考察するべきは, $U_3(\beta, \gamma)$ のタイプの領域上であり, 他のタイプについては Proposition 5.1 により自明である. $\phi(d(z, \gamma))$ を単に ϕ と表すことにする. \mathcal{L}_μ に接するベクトル場 X は, $U_3(\beta, \gamma)$ 上で $\phi G(\alpha) + (1 - \phi)E(\beta)$ である. ただし, これは一般に大きさは1ではない. v を点 $z \in U_3(\beta, \gamma)$ での unit vector とする. このとき

$$\nabla_v X = \nabla_v E + \nabla_v(\phi) \cdot (G - E) + \phi \cdot \nabla_v(G - E)$$

である. また, 対応する単位ベクトル場の微分は

$$\begin{aligned} \nabla_v(X/\|X\|) &= \nabla_v(1/\|X\|) \cdot X + (\nabla_v X)/\|X\| \\ &= \frac{-\nabla_v \|X\|}{\|X\|^2} \cdot X + \frac{\nabla_v X}{\|X\|} \end{aligned}$$

となるが, ここで

$$2\|X\|\nabla_v\|X\| = \nabla_v\|X\|^2 = \nabla_v\langle X, X \rangle = 2\langle \nabla_v X, X \rangle$$

なので, 結局

$$\nabla_v(X/\|X\|) = \frac{\nabla_v X}{\|X\|} - \frac{\langle \nabla_v X, X \rangle X}{\|X\|^3}. \quad (7.1)$$

このノルムを評価するために、まず、 $\langle E(\beta), G(\alpha) \rangle$ を評価しよう (α は β と γ の共通垂線である). $v = G(\beta)(z)$ (i.e. ベクトル場 $G(\gamma)$ の点 z での値) として、

$$\begin{aligned} |\nabla_v \langle E(\alpha), E(\beta) \rangle| &= |\langle \nabla_v E(\alpha), E(\beta) \rangle| && (\nabla_v E(\beta) = 0) \\ &= |\langle v, E(\alpha) \rangle \tanh(d(z, \alpha)) \langle -G(\alpha), E(\beta) \rangle| && \text{(Proposition 5.1 (6))} \\ &\leq |\langle G(\alpha), E(\beta) \rangle| \\ &= \sqrt{1 - \langle E(\alpha), E(\beta) \rangle^2} \end{aligned}$$

を得る. したがって、 $G(\beta)$ の積分曲線を $c(t)$ (t は弧長パラメータ) として、 $u(t) = \langle E(\alpha), E(\beta) \rangle(c(t))$ とおけば

$$\left| \frac{du}{dt} \right| \leq \sqrt{1 - u^2}$$

を得る. ここで、Lemma 7.4 を適用する. $0 \leq t \leq \mu$ ($\mu < (\log 3)/2 < 1$) の範囲で、 $u(t) < 1 - \delta$ ($\delta > 0$) となるので、関数 $\sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1 - \delta$) は lipschitz 連続であり、 $u(0) = 0 = \sin 0$ であるから仮定が満たされて、 $|u(t)| \leq \sin t$ となる.

いま、

$$|\langle E(\alpha), E(\beta) \rangle(c(t))| = |\langle R(E(\alpha)), R(E(\beta)) \rangle(c(t))| = |G(\alpha), G(\beta)|c(t) \leq \sin t$$

であり、 $\langle G(\alpha), E(\beta) \rangle(c(t)) = \langle E(\alpha), G(\beta) \rangle(c(t)) \geq \cos t$ を得る. したがって、任意の単位ベクトル $(z, v) \in T\mathbb{H}^2|_{U_\mu}$ に対して

$$\begin{aligned} |\nabla_v \langle G(\alpha), E(\beta) \rangle| &= |\langle \nabla_v G(\alpha), E(\beta) \rangle + \langle \nabla_v E(\beta), G(\alpha) \rangle| \\ &\leq |\langle \nabla_v G(\alpha), E(\beta) \rangle| + |\langle \nabla_v E(\beta), G(\alpha) \rangle| \\ &\leq |\langle \nabla_{E(\alpha)} G(\alpha), E(\beta) \rangle| + |\langle \nabla_{E(\beta)} E(\beta), G(\alpha) \rangle| \\ &\leq |\langle \tanh(d(z, \alpha)) \cdot E(\alpha), E(\beta) \rangle| + |\langle \tanh(d(z, \beta)) \cdot G(\beta), G(\alpha) \rangle| \\ &\leq \sin t + \tanh t \cdot \sin t \end{aligned}$$

を得る. ここで、 $t(z) = d(z, \beta)$ としている.

簡単な計算で

$$\langle X, X \rangle = 1 - 2\phi(1 - \phi)(1 - \langle G(\alpha), E(\beta) \rangle) \geq \frac{1 + \cos t}{2}$$

がわかる. また

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_v X, X \rangle &= \nabla_v \langle X, X \rangle \\ &= 2(1 - \langle G(\alpha), E(\beta) \rangle) \nabla_v \phi(1 - \phi) + 2\phi(1 - \phi) \nabla_v \langle G(\alpha), E(\beta) \rangle \end{aligned}$$

となる. $\text{grad}(\phi) = A \cdot G(\gamma)$ より、 $|\nabla_v \phi(1 - \phi)| = |(1 - \phi) \nabla_v \phi - \phi \nabla_v \phi| \leq |1 - 2\phi| |\nabla_v \phi| \leq A$ となるから

$$|\langle \nabla_v X, X \rangle| \leq A(1 - \cos t) + \frac{(1 + \tanh t) \sin t}{4} \leq 2A \sin^2(t/2) + \frac{\sin t}{2(1 + e^{-2t})}$$

を得る.

つぎに $\|\nabla_v X\|$ を評価する。まず

$$\|G(\alpha) - E(\beta)\|^2 = 2(1 - \langle G(\alpha), E(\beta) \rangle) \leq 4 \sin^2(t/2)$$

ゆえに, $\|G(\alpha) - E(\beta)\| \leq 2 \sin(t/2)$. よって,

$$\begin{aligned} \|\nabla_v X\| &\leq \|\nabla_v E\| + |\nabla_v \phi| \|G(\alpha) - E(\beta)\| + |\phi| \|\nabla_v(G(\alpha) - E(\beta))\| \\ &\leq \tanh t + 2A \sin(t/2) + (1 + \tanh t) \\ &= 1 + 2 \tanh t + 2A \sin(t/2). \end{aligned}$$

また, $\|X\| \leq \phi \|G(\alpha)\| + (1 - \phi) \|E(\beta)\| \leq 1$ に気をつけて, (7.1) にここまでで得られた不等式を代入してやると, $U_3(\beta, \gamma)$ 上での classical lipschitz 定数の評価を得る.

U_μ における任意の開集合 U に対する classical lipschitz 定数の評価を考える. U に含まれる任意の測地線に対して, 適当に区間を分割すれば, それぞれの線分が U_μ を構成する 3 つのタイプの領域に含まれるようにできる. そのような分割を行ったあと, Claim 7.3 のような評価を行ってやればよい. \square

次の補題は, 上の証明の中で用いた微分不等式に関する命題である.

Lemma 7.4. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を Lipschitz 連続関数, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数とし, 区間 I 上

$$f'(t) \leq F(f(t)), \quad g'(t) = F(g(t)), \quad f(t_0) = g(t_0) \quad (t_0 \in I)$$

を満たしているとする. このとき, 任意の $t \in I$ ($t \geq t_0$) で $f(t) \leq g(t)$ が成り立つ.

Proof. $u(t) = f(t) - g(t)$ とおく. 任意の $t \in I$ で $u(t) \leq 0$ を示せばよい. そこで, ある $t_1 > t_0$ が存在して, $u(t) > 0$ となったとしよう. このとき, $a := \sup\{t \in [t_0, t_1] \mid u(t) \leq 0\}$ が存在する. 明らかに, 区間 $(a, t_1]$ 上, $u(t) > 0$ である. いま, 区間 (a, t_1) 上で

$$u'(t) = f'(t) - g'(t) \leq F(f(t)) - F(g(t)) \leq L|f(t) - g(t)| = L|u(t)| = Lu(t)$$

を得る. ただし, L は F の Lipschitz 定数とする. ここで

$$(u(t)e^{-Lt})' = u'(t)e^{-Lt} - Lu(t)e^{-Lt} = (u'(t) - Lu(t))e^{-Lt} \leq 0 \quad (a < t < t_1)$$

を得る. したがって, $u(t)e^{-Lt}$ は単調減少関数であるが, $u(a) = 0$ なので, これは仮定に反する. \square

Lemma 7.5 (Continuous dependence). \mathbb{H}^2 上の geodesic lamination の列 \mathcal{L}_n が, ある geodesic lamination \mathcal{L} に収束するとする. このとき, $\mathcal{L}_{n\mu}$ に接する line field は, \mathcal{L} の μ 近傍 U_μ 上の任意のコンパクト部分集合上, 一様に \mathcal{L}_μ に収束する. 同様に, \mathcal{L}_μ に直交する line field (の積分曲線のなす foliation) \mathcal{F}_μ についても, これは成り立つ. ただし, 任意のコンパクト部分集合 $K \subset U_\mu$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $K \subset U_{n\mu}$ となることに注意する.

Remark 7.6. 「ただし,」以降について補足. 各点 $x \in U_\mu$ に対して, ある測地線 $\gamma \in \mathcal{L}$ と ($\mu >$) $\delta > 0$ が存在して, $B(x; \delta) \in \gamma_\mu$ となる. ただし, γ_μ は γ の μ 近傍を表すとす. γ への直交射影を $\pi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \gamma$ とし, γ に収束する測地線の列 $\gamma_n \in \mathcal{L}_n$ をとる. 十分大きい任意の n に対して, $d(\pi(x), \gamma_n) < \mu - d(x, \pi(x)) - \delta$ となる (右辺は正). ゆえに, 任意の $y \in B(x; \delta)$ に対して, $d(y, \gamma_n) < d(y, x) + d(x, \pi(x)) + d(\pi(x), \gamma_n) < \mu$ となる. このことから, 一様に $U_{\mu n}$ に含まれるような近傍を各点をもつことがわかるので, 「ただし,」以降の事実が成り立つ.

Proof. 証明のステップは (1) 各点収束をいい (2) 一様性を line field の Lipschitz 性から導くという, 2ステップである.

(1-i) 点 $x \in \mathbb{H}^2$ が geodesic lamination \mathcal{L} の flat piece (すなわち, $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{L}$ の連結成分) に含まれるときを考える. いま, 十分大きい任意の n に対して, ある \mathcal{L}_n の flat piece F_n が存在して, $x \in F_n$ となる. また, Remark 7.6 の議論により, $x \in U_\mu$ ならば, 十分大きい任意の n に対して, $x \in U_{n\mu}$ となる. $\mu < (\log 3)/2$ に注意して, $x \in F \cap U_{n\mu}$ のとき, \mathcal{L} に属する x に最も近い測地線は, 高々 2 つである. β を x から最も近い \mathcal{L} の leaf とする. また, x を $\sinh^{-1}(e^\mu)$ 近傍として含むような測地線が存在すれば, それを γ としておく (Corollary 6.1 により, このようなものは一意である). いま, β, γ それぞれに対して, 十分 “近い” $\beta_n, \gamma_n \in \mathcal{L}_n$ が存在する. すなわち, n を十分大きくすれば

$$x \in U_1(\beta, \gamma) \implies x \in U_1(\beta_n, \gamma_n)$$

が成り立つ. $x \in U_2(\beta), x \in U_3(\beta, \gamma)$ の場合も同様である.*2 測地線 α を β, γ の共通垂線としよう. $\beta_n \rightarrow \beta$ かつ $\gamma_n \rightarrow \gamma$ であるから, β_n と γ_n の共通垂線 α_n についても, $\alpha_n \rightarrow \alpha$ である. したがって, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{H}^2$ 上一様に $G(\alpha_n) \rightarrow G(\alpha)$ である. つまり,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in K, n \geq N \implies \|G(\alpha_n)(x) - G(\alpha)(x)\| < \varepsilon$$

が成り立つ. また, $E(\beta_n)$ も $E(\beta)$ にコンパクト一様収束する. (本の議論にそって, こう述べたが, ここでは各点収束性だけわかればよい. 一様性は後ほど補足する.) したがって, とくに, $U_1(\beta, \gamma)$ や $U_2(\beta)$ 上 $\mathcal{L}_{n\mu}$ (に接する line field) は \mathcal{L}_μ (に接する line field) に各点収束する. $U_3(\beta, \gamma)$ 上, \mathcal{L}_μ に接するベクトル場 X は

$$X = \phi(d(z, \gamma))G(\alpha) - (1 - \phi(d(z, \gamma)))E(\beta)$$

で定まっていた. したがって, $U_3(\beta, \gamma)$ 上でも, 各点収束性は成り立つ.

(1-ii) つぎに, $x \in \mathcal{L}$ となっている場合を考える. $x \in \lambda \in \mathcal{L}$ とする. このとき, ある列 $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_n \in \mathcal{L}_n$) が存在して, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ である. したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $x_n \in \lambda_n$ であって, $d(x_n, x) < \varepsilon$ となる点が存在する. x_n での接ベクトル v を $v := \mathcal{L}_{n\mu}(x_n)$ で定める (このあたりから, \mathcal{L}_μ で, \mathcal{L}_μ に接する line (vector) field を

*2 厳密には, $d(x, \gamma) = \mu$ or $\sinh^{-1}(e^\mu)$ の場合を考えると, $d(x, \gamma_n)$ が単調に収束するように部分列を取って議論しなければいけないはず.

表すようになる). v は測地線 λ_n の x_n での単位接ベクトルである. $c_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ を x_n から x に向かう測地線とする. いま,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\mu(x) - \mathcal{L}_{n\mu}(x)\| &< \|\mathcal{L}_\mu(x) - (P_{c_n})_0^1 v\| + \|\mathcal{L}_{n\mu}(x) - (P_{c_n})_0^1 v\| \\ &< d(x, x_n) + k(\mu)d(x, x_n) \\ &= (1 + k(\mu))d(x, x_n) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. したがって, $x \in \mathcal{L}$ の場合も各点収束性が確かめられた.

(2) コンパクト集合上の一様収束を示すためには, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in U_\mu$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 十分大きい任意の n を取れば, $y \in \overline{B(x, \delta)}$ ($\delta > 0$) に対して $\|\mathcal{L}_{n\mu}(y) - \mathcal{L}_\mu(y)\| < \varepsilon$ となることを示せば良い. まず各点収束性より, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $\|\mathcal{L}_\mu(x) - \mathcal{L}_{n\mu}(x)\| < \varepsilon$ である. このとき, 任意の $y \in \overline{B(x, \varepsilon)}$ に対して, $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ を x から y に向かう測地線とする. このとき,

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}_\mu(y) - \mathcal{L}_{n\mu}(y)\| \\ &< \|\mathcal{L}_\mu(y) - (P_c)_0^1 \mathcal{L}_\mu(x)\| + \|(P_c)_0^1 \mathcal{L}_\mu(x) - (P_c)_0^1 \mathcal{L}_{n\mu}(x)\| + \|(P_c)_0^1 \mathcal{L}_{n\mu}(x) - \mathcal{L}_{n\mu}(y)\| \\ &< 2k(\mu)d(x, y) + \varepsilon \\ &< M\varepsilon \quad (M := (2k(\mu) + 1)) \end{aligned}$$

となるので, 一様性が従う. □

8 Foliation coordinates

ここまでで, \mathcal{L}_μ という, line field から定まる foliation と, それに直交する line field から定まる \mathcal{F}_μ という foliation を構成した. これらの foliation は, U_μ 上の座標として, S_ε から S へ向かう写像を構成する際に利用される. そこで, このような foliation から定まる座標の性質をここで調べておこう.

M を path-metric の入った 2 次元多様体とする (いわゆる length space という種の距離空間と思えばよい). X, Y をそれぞれ M 上の互いに transverse する foliation とする.

Definition 8.1. 点 $z_0 \in M$ を固定する. 中への同相写像 $\phi: (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$ ($a < 0 < b, c < 0 < d$) が z_0 を中心とした **foliation coordinate** を与える **foliation chart** であるとは, 次の条件を満たすときにいう:

- (1) $\phi(0, 0) = z_0$,
- (2) $x \in (a, b), y \in (c, d)$ に対して, $\phi((a, b) \times \{y\}) \subset (\text{leaf of } X)$, $\phi(\{x\} \times (c, d)) \subset (\text{leaf of } Y)$,
- (3) ϕ は $(0, 0)$ を通る horizontal, vertical line については, 等長写像になっている.

Definition 8.2. α を向きづけられた測地線とする. Standard vector field $G(\alpha), E(\alpha)$ の積分曲線たちが定める座標を α に関する **standard foliation coordinate** という: つまり, α 上に点

z_0 があり, \mathbb{H}^2 上の点 z が与えられたら, z_0 から, z の α への直交射影 $\pi(z)$ までの距離を s , $\pi(z)$ から z までの距離を t とするようなチャート $\phi_{\text{sfc}}: (\mathbb{R}^2, (s, t)) \rightarrow \mathbb{H}^2$ が定まる.

X という $z_0 \in \mathbb{H}^2$ の近傍上定義されたベクトル場が与えられたとき, $X(z_0)$ を接ベクトルにもつような geodesic α がただ一つ存在する. この α に関する standard foliation coordinate を X (と z_0) に関する standard foliation coordinate という.

Proposition 5.1 で見たように

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cosh t \cdot E(\alpha), \quad \frac{\partial}{\partial t} = G(\alpha)$$

である.

Lemma 8.3. $\phi_{\text{sfc}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ の α の t -近傍 U_t での lipschitz 定数は $\cosh t$ である. また, ϕ_{sfc}^{-1} の $\phi_{\text{sfc}}^{-1}(U_t)$ での lipschitz 定数は 1 である. ただし, \mathbb{R}^2 側には通常のユークリッド計量が入っているとする.

Proof. \mathbb{R}^2 上の正規直交枠として, $\partial/\partial s, \partial/\partial t$ をとる. また, \mathbb{H}^2 上の正規直交枠として, $E(\alpha), G(\alpha)$ をとる. これらに関する微分 $\phi_{\text{sfc}*}, \phi_{\text{sfc}}^{-1}$ の表現行列は, それぞれ

$$\begin{bmatrix} \cosh t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である. ゆえに,

$$\sup_{v \in T\mathbb{R}^2} \frac{\|\phi_{\text{sfc}*}(v)\|_{\text{Hyp}}}{\|v\|_{\text{Euc}}} = \cosh t, \quad \sup_{u \in T\mathbb{H}^2} \frac{\|\phi_{\text{sfc}}^{-1}(u)\|_{\text{Euc}}}{\|u\|_{\text{Hyp}}} = 1.$$

したがって, 任意の 2 点 $p, q \in \mathbb{R}^2$ に対して, p, q を結ぶ \mathbb{R}^2 内の測地線を $\bar{\gamma}$ とし, $\phi_{\text{sfc}}(p), \phi_{\text{sfc}}(q)$ を結ぶ \mathbb{H}^2 内の測地線を γ とする. このとき, $\bar{\gamma} \subset \phi_{\text{sfc}}^{-1}(U_t)$ かつ $\gamma \subset U_t$ である. したがって,

$$\begin{aligned} d_{\text{Hyp}}(\phi_{\text{sfc}}(p), \phi_{\text{sfc}}(q)) &= \int_{\gamma} ds_{\text{Hyp}} \\ &\leq \int_{\phi_{\text{sfc}}(\bar{\gamma})} ds_{\text{Hyp}} \\ &= \int_{\bar{\gamma}} \phi_{\text{sfc}}^* ds_{\text{Hyp}} \\ &= \int_0^1 \|d\bar{\gamma}/ds\|_{\phi_{\text{sfc}}^* \rho_{\mathbb{H}^2}} ds \\ &= \int_0^1 \|\phi_{\text{sfc}*}(d\bar{\gamma}/ds)\|_{\text{Hyp}} ds \\ &= \int_0^1 \frac{\|\phi_{\text{sfc}*}(d\bar{\gamma}/ds)\|_{\text{Hyp}}}{\|d\bar{\gamma}/ds\|_{\text{Euc}}} \cdot \|d\bar{\gamma}/ds\|_{\text{Euc}} ds \\ &\leq \sup_{v \in T(\phi_{\text{sfc}}^{-1}(U_t))} \frac{\|\phi_{\text{sfc}*}(v)\|_{\text{Hyp}}}{\|v\|_{\text{Euc}}} \int_0^1 \|d\bar{\gamma}/ds\|_{\text{Euc}} ds \end{aligned}$$

$$\leq \cosh t \cdot d_{\text{Euc}}(p, q)$$

を得る。逆写像についても同様にすればよい。 \square

Definition 8.4. 通常, $g(x) = O(f(x))$ ($x \rightarrow 0$) と書けば, これは, ある 0 の近傍上ある定数 C が存在して, $g(x)/f(x) < C$ が成り立つということを意味する. そこで, k を定数として, $g(x) = O(f(x); k)$ ($x \rightarrow 0$) と書けば, ある 0 の近傍上, ある定数 $C = C(k)$ が存在して, $g(x)/f(x) < C(k)$ となることを意味するものとしよう.

Lemma 8.5. $B(z_0, r)$ を $z_0 \in \mathbb{H}^2$ を中心とした半径 $r > 0$ の円盤とする. X, Y を $B(z_0, r)$ 上定義された, 互いに直交するような (単位^{*3}) ベクトル場とし, それぞれ classical lipschitz 定数が k であるとしよう. また, $\phi_{\text{sfc}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ を X と z_0 に関する standard foliation coordinate とし,

$$\theta_1 = \angle_{\text{Euc}}(\phi_{\text{sfc}*}^{-1} X, \phi_{\text{sfc}*}^{-1}(\partial/\partial s)), \theta_2 = \angle_{\text{Euc}}(\phi_{\text{sfc}*}^{-1} Y, \phi_{\text{sfc}*}^{-1}(\partial/\partial t))$$

とおく. このとき

$$\theta_1 < kr + O(r^2; k), \theta_2 < kr + O(r^2; k) \quad (r \rightarrow 0)$$

である.

Proof. 測地線 α からの距離を d で表す. $B(z_0, r)$ 上, $d < r$ である. ベクトル場 $X - \cosh d \cdot E$ と $Y - G$ の classical lipschitz 定数は, Proposition 5.1 より, $k + \sinh d$ で上から抑えられている. したがって, 点 $z \in B(z_0, r)$ に対して, $\gamma: [0, 1] \rightarrow B(z_0, r)$ を z から z_0 に向かう測地線とすると,

$$\begin{aligned} \|X - \cosh d \cdot E\| &= \|(P_\gamma)_0^1(X - \cosh d \cdot E)(z_1) - (X - \cosh d \cdot E)(z_0)\| \\ &\leq (k + \sinh d) \cdot d(z, z_0) \\ &\leq (k + \sinh r)r \end{aligned}$$

となる. 同様に $\|Y - G\| \leq (k + \sinh r)r$ となる. また, ϕ_{sfc}^{-1} の lipschitz 定数が 1 で抑えられているので

$$\|\phi_{\text{sfc}*}^{-1} X - \phi_{\text{sfc}*}^{-1}(\partial/\partial s)\|_{\text{Euc}} \leq \|X - \partial/\partial s\|_{\text{Hyp}} = \|X - \cosh d \cdot E\|_{\text{Hyp}} \leq (k + \sinh r)r$$

を得る. 同様に $\|\phi_{\text{sfc}*}^{-1} Y - \phi_{\text{sfc}*}^{-1}(\partial/\partial t)\|_{\text{Euc}} \leq (k + \sinh r)r$ を得る. $\|\phi_{\text{sfc}*}^{-1}(\partial/\partial s)\| = 1$ なので, $r > 0$ が十分小さいとき, ユークリッド幾何的な考察から $\sin \theta_1 \leq \|\phi_{\text{sfc}*}^{-1} X - \phi_{\text{sfc}*}^{-1}(\partial/\partial s)\|$ がわかる. $\sin^{-1} u = u + O(u^3)$ ($u \rightarrow 0$) であることを利用して, 結論を得る. θ_2 についても同様である. \square

Lemma 8.6. 先ほどの補題と同様に X, Y を $B_{\text{hyp}}(z_0, 2r)$ 上の classical lipschitz 定数が k であるような, 互いに直交している単位ベクトル場とする. X に関する leaf (i.e. 積分曲線) A は

*3 書かれていないが, 証明から察するに, 仮定しているようである.

$B(z_0, r)$ と交わりを持つとし, Y に関する leaf B は z_0 を通るとする. このとき, A と B は高々 1 回交わり, その交点を u とすると

$$d(u, z_0) \leq r + O(r^2; k) \quad (r \rightarrow 0)$$

が成り立つ.

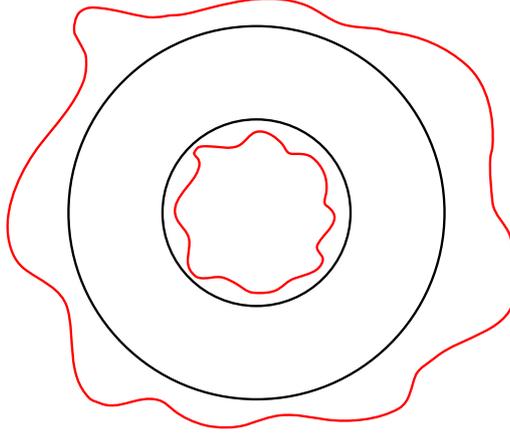


図4 内側から順に, $B_{\text{hyp}}(z_0, r), B_{\text{sfc}}(z_0, r), B_{\text{sfc}}(z_0, 2r/\cosh 2r), B_{\text{hyp}}(z_0, 2r)$

Proof. X と z_0 に関する standard foliation coordinate と比較しながら証明を進める. すなわち, 以降 ϕ_{sfc} に関する座標は, 表記を簡潔にするため省略する. $B_{\text{sfc}}(z_0, r)$ で standard foliation coordinate からくる Euclid 計量における円盤を表す. いま, Lemma 8.3 により, ϕ_{sfc}^{-1} (resp. ϕ_{sfc}) の lipschitz 定数が z_0 (の双曲計量 (resp. sfc 計量) で測ったとき) の r -近傍上評価できているので,

$$B_{\text{hyp}}(z_0, r) \subset B_{\text{sfc}}(z_0, r), \quad (\text{resp. } B_{\text{sfc}}(z_0, 2r/\cosh 2r) \subset B_{\text{hyp}}(z_0, 2r)) \quad (8.1)$$

が成り立つ. ゆえに, Lemma 8.5 から, $B_{\text{sfc}}(z_0, 2r/\cosh 2r)$ 上 X と sfc 座標の s 軸のなす角度は

$$k(2r/\cosh 2r) + O((2r/\cosh 2r)^2; k) = 2kr + O(r^2; k) \quad (r \rightarrow 0) \quad (8.2)$$

で上から抑えられる.

小さい角度 θ をとる. また, ユークリッド的三角形 xyz_0 を考える. ここで, x は $\partial B_{\text{sfc}}(z_0, r)$ 上にあり, 線分 z_0x は z_0 を通る s 軸との角度が θ であるとし, 線分 yx は $\partial B_{\text{sfc}}(z_0, r)$ に接しており, 線分 z_0y と s 軸の角度は, s 軸に関して x と線対称方向に角度 θ を成しているとする (図 5). このとき, 線分 z_0y のユークリッド的長さは $r/\cos 2\theta$ になる.

この議論を $\theta = 2kr + O(r^2; k)$ に対して適用する. また,

$$d_{\text{sfc}}(v, z_0) \leq r/\cos(4kr + O(r^2; k)) = r + O(r^2; k).$$

上の不等号と Lemma 8.3 により, $d_{\text{hyp}}(\phi_{\text{sfc}}v, \phi_{\text{sfc}}z_0)/d_{\text{sfc}}(v, z_0) \leq \cosh(r + O(r^2; k))$ となる^{*4}

^{*4} 自分が何回も混乱するので, ここでは ϕ_{sfc} を明示した.

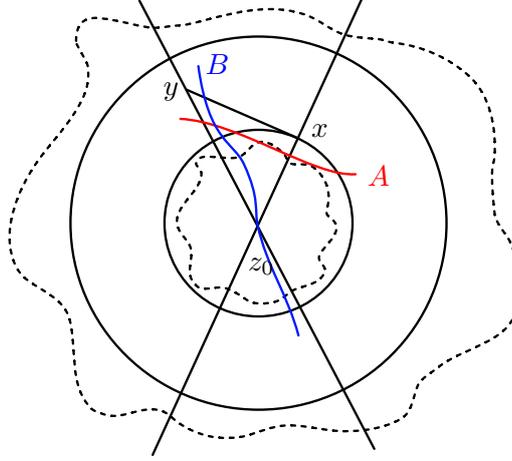


図 5 (A と B が直角らしくないのは許してください)

ので,

$$d_{\text{hyp}}(v, z_0) \leq \cosh(r + O(r^2; k))d_{\text{sfc}}(v, z_0) \leq r + O(r^2; k) \quad (8.3)$$

したがって, r を k に依存して十分小さくとれば, 三角形 xyz_0 は $B_{\text{hyp}}(z_0, 2r)$ に含まれる (図 5). すなわち, 三角形 xyz_0 は X, Y の定義域上にある.

次に,

$$W = \{z_0\} \cup \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \text{線分 } pz_0 \text{ と } s \text{ 軸のなす角度が } \theta \text{ 以下}\}$$

と \mathbb{H}^2 上の閉集合を定める (正確には ϕ_{sfc} の像というべきだが, 同一視している).

このとき, $B_{\text{hyp}}(z_0, r)$ と交わりをもつ X に関する leaf A は W と必ず交わりをもつ : なぜならば, まず, X は $B_{\text{hyp}}(z_0, 2r)$ 上定義されているので, (8.1) により, $B_{\text{sfc}}(z_0, 2r/\cosh 2r) = B_{\text{sfc}}(z_0, 2r - O(r^2))$ 上で定義されているということになる. したがって, r が十分小さいとき

$$B_{\text{hyp}}(z_0, r) \subset B_{\text{sfc}}(z_0, r) \subset B_{\text{sfc}}(z_0, 2r/\cosh 2r) \subset B_{\text{hyp}}(z_0, 2r)$$

という包含関係になっているとしてよい (図 4).

つぎに, sfc の s 軸と平行な線と X のなす角は (8.2) により, $2kr + O(r^2; k)$ 以下. そして, A は $B_{\text{hyp}}(z_0, r)$ を通るので, (図 6) のように, 各点での赤いコーンに挟まれた範囲にしか A は動けない. ゆえに, $B_{\text{hyp}}(z_0, r)$ と交わりをもつ X に関する leaf A は W と必ず交わりをもつことがわかる.

また, Lemma 8.5 より, z_0 を通る Y の leaf B と s 軸に平行な直線たちのなす角度は $2kr + O(r^2)$ 以下. したがって, B は W に含まれる (図 5).

これらの議論により A と B の交点 u は, 三角形 xyz_0 (もしくは s 軸に沿って線対称なもの) の内部にあることがわかる (A は線分 xy の向こう側に行くことはできない (図 6)). ゆえに, (8.3) より, 結論を得る. \square

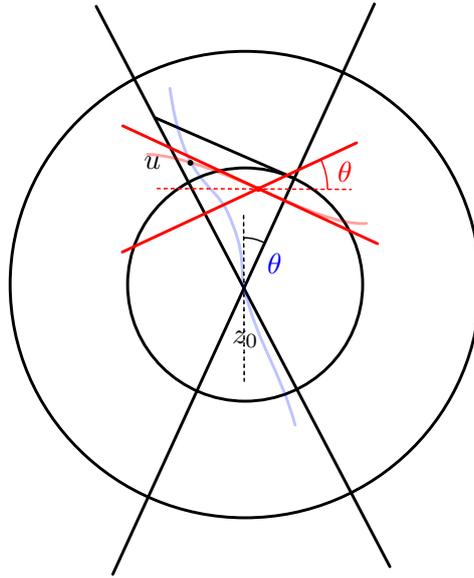


図 6

Lemma 8.7. (区分的に) *⁵ 滑らかな曲面の凸開集合を U とし, U 上の単位ベクトル場 X の classical lipschitz 定数は k であるとする. 点 $z_0 \in U$ を固定し, 弧長パラメータ付けされた測地線 γ であって, $\gamma(0) = z_0, \gamma'(0) = X(z_0)$ を満たすものを取る. 正の数 $t > 0$ に対して

$$k_1 = k_1(t) = \frac{e^{kt} - kt - 1}{kt^2}$$

とおく. このとき, 任意の $0 \leq s < t$ に対して

$$d(\gamma(s), x_s(z_0)) \leq k_1 |s|^2$$

が成り立つ. ここで, $x_s(z_0)$ は z_0 を始点とする X の積分曲線を表し, t は, 任意の $s < t$ に対して, $x_s(z_0), \gamma(s) \in U$ を満たす範囲で考える.

Proof. 連続関数 $\varepsilon: (a, b) \rightarrow U$ ($a < 0 < b$) を $\varepsilon(s) = ks$ で定める. このとき

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s) - X(\gamma(s))\| &= \|(P_\gamma)_s^0 \gamma'(s) - (P_\gamma)_s^0 X(\gamma(s))\| \\ &= \|\gamma'(0) - (P_\gamma)_s^0 X(\gamma(s))\| \\ &= \|X(\gamma(0)) - (P_\gamma)_s^0 X(\gamma(s))\| \\ &\leq kd(z_0, \gamma(s)) = ks \end{aligned}$$

となるので, γ は X の ε -近似解 (Definition 8.9) になっている. ここで, Theorem 8.10 を適用すると

$$d(\gamma(t), x_t(z_0)) \leq \int_0^t kse^{k(t-s)} ds = ke^{kt} \int_0^t se^{-ks} ds = \frac{e^{kt} - kt - 1}{k}$$

*⁵ ε -distant surface のようなものを想定している.

を得る. t を s に置き換えて

$$d(\gamma(s), x_s(z_0)) \leq \frac{e^{ks} - ks - 1}{k}$$

となるが, $0 \leq s < t$ のとき, $e^{ks} - ks - 1/ks^2$ の単調増加性から

$$\frac{e^{ks} - ks - 1}{k} = \frac{e^{ks} - ks - 1}{ks^2} s^2 \leq \frac{e^{kt} - kt - 1}{kt^2} s^2$$

となるから, 主張を得る. □

Lemma 8.8 (Length continuous). 双曲平面の凸開集合 U 上定義された互いに直交する lipschitz 単位ベクトル場 X, Y があるとする. $a \leq 0 \leq b, c \leq 0 \leq d$ とし, $\phi: [a, b] \times [c, d] \rightarrow U$ を X と Y に関する foliation coordinate とする (Definition 8.1). このとき, 各 $t \in [c, d]$ に対して, path $\phi([a, b] \times \{t\})$ の長さを対応させる関数は連続である.

Proof. $a = 0$ として, 一般性を失わない. $t = 0$ での連続性のみ示す必要がある*6. 任意の $s \in [a, b]$ に対して, Theorem 8.10 より,

$$d(\phi(s, 0), x_s(\phi(0, t))) = d(x_s(\phi(0, 0)), x_s(\phi(0, t))) \leq e^{ks}|t| \quad (8.4)$$

となる (今の場合 $\varepsilon(t)$ として 0 がとれる). ここで, φ はベクトル場 X の local flow である. したがって, $|t| \rightarrow 0$ とすると, $x_s(\phi(0, t))$ は $\phi(s, 0)$ に近づく.

十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ を固定する. \mathbb{R}^2 において $(0, b - \varepsilon), (0, b), (0, b + \varepsilon)$ を中心とした, どの2つも互いに交わらない開球近傍をとり, それぞれ U_1, U_2, U_3 とする. このとき, (8.4) により, t を十分小さく取れば,

$$x_{b-\varepsilon}(\phi(0, t)) \in \phi(U_1), x_{b+\varepsilon}(\phi(0, t)) \in \phi(U_3)$$

となる. ここで, ϕ は同相写像であることに注意すると, $[a, b] \times \{t\}$ と U_1, U_2, U_3 との交わり方は, ϕ により保たれるので, 曲線 $\phi([a, b] \times \{t\})$ の上で $x_{b-\varepsilon}(\phi(0, t)), \phi(b, t), x_{b+\varepsilon}(\phi(0, t))$ は順に並んでいる. したがって, t が十分小さいとき, $|\text{length}(\phi([a, b] \times \{t\})) - b| < \varepsilon$ となるので, 主張を得る. □

Approximate solution to differential equations

Definition 8.9. リーマン多様体 M 上のベクトル場 Z をとる. 連続関数 $\varepsilon: (a, b) \rightarrow (0, \varepsilon)$ ($a < 0 < b$) に対して, 滑らかな曲線 $\beta: (a, b) \rightarrow M$ が Z の ε -近似解 (approximation solution) であるとは, 各時刻 $t \in (a, b)$ に対して

$$\|\beta'(t) - Z(\beta(t))\| \leq \varepsilon(t)$$

が成り立つときにいう.

*6 原著に忠実に訳してみたが, なぜなのか, わからない. 他の点も同様の議論で片付くからなのか, 他の点では自明なのか. おそらく「簡単のため $t = 0$ での連続性を示す」ということなのだと思う.

Theorem 8.10. M を完備もしくは凸なリーマン多様体とする。 Z を classical lipschitz 定数が K であるような M 上のベクトル場とする。 $\varphi: (a, b) \rightarrow M$ を Z の積分曲線とする。 このとき, 連続関数 $\varepsilon: (a, b) \rightarrow M$ に関する ε -近似解 $\beta: (a, b) \rightarrow M$ に対して, $d(\varphi(0), \beta(0)) \leq \delta$ ($\delta > 0$) ならば

$$d(\gamma(t), \beta(t)) \leq \delta e^{K|t|} + \left| \int_0^t \varepsilon(s) e^{K|t-s|} ds \right|$$

が成り立つ。

参考文献

- [CME06] Richard Douglas Canary, Albert Marden, and David BA Epstein. *Fundamentals of hyperbolic manifolds: Selected expositions*. Number 328. Cambridge University Press, 2006.
- [FSN21] (Question) Foivos and (Answer) Sahoo Nikhil. Completeness of the tangent bundle of riemannian manifold. <https://math.stackexchange.com/questions/3116727/completeness-of-the-tangent-bundle-of-riemannian-manifold/4156094#4156094>, 2021.
- [GHL⁺90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, et al. *Riemannian geometry*, volume 2. Springer, 1990.