Courant Lebesgue の補題

坂井 健人

2024 年 4 月 8 日

概要

このノートでは，[Wol89] に基づき，写像のエネルギーが写像の動かす距離を制限することを意味する Courant Lebesgue の補題を紹介する．この応用として，Teichmüller 空間上のエネルギー関数が proper であることを示せる (いずれ加筆するつもり).

1 主張

Theorem 1.1. 曲面 M 上の計量 σ はガウス曲率 $K(\sigma) \equiv -1$ or 0 を満たすとし，$w\colon M \to (S, \rho)$ を滑らかな写像とする．$R < 1$ として，$U := B_\sigma(p, R^{1/2}) \subset S$ は埋め込まれているとし，U 上 w は同相写像であるとする．$E(w|_U) < +\infty$ を $w|_U\colon U \to (S,\rho)$ のエネルギーとする．このとき，$x_1, x_2 \in B_\sigma(p, R) \subset U$ に対して

$$d_\rho(w(x_1), w(x_2)) \leq 4\sqrt{2}\pi \left(\frac{E(w|_U)}{\log 1/R}\right)^{1/2}$$

が成り立つ．

Remark 1.2. 上の主張において，$R \to 0$ で，(右辺) $\to 0$ となることに気をつける．このような評価を与えることは意外にシビアで (たとえば，$R < 2R$ などとすると定数で抑えることしかできない)，この主張のキモと思われる．

Proof. (r, θ) を p を中心とする極座標とする．このとき，

$$ds_\sigma^2 = \sigma(x,y)(dx^2 + dy^2) = dr^2 + G(r)^2\, d\theta^2$$

と表される．ここで，

$$G(r) = \begin{cases} \sinh r & (K(\sigma) \equiv -1) \\ r & (K(\sigma) \equiv 0) \end{cases}$$

である．$x_3, x_4 \in \partial B_\sigma(x_0, r)$ $(R < r < R^{1/2})$ に対して，Cauchy-Schwarz の不等式より，

$$d_\rho(w(x_3), w(x_4)) \leq \int_0^{2\pi} \rho(w(r,\theta)) \left|\frac{\partial w}{\partial \theta}(r,\theta)\right| d\theta \leq 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \rho(w(r,\theta)) \left|\frac{\partial w}{\partial \theta}(r,\theta)\right| d\theta\right)^{1/2} \tag{1.1}$$

を得る．

また，$A=\{(r,\theta)\mid R<r<R^{1/2}\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
E(w|_U) &= \int_U e(w;\sigma,\rho)\,dA(\sigma)\\
&\geq \int_A e(w;\sigma,\rho)\,dA(\sigma)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_R^{R^{1/2}} \rho(w(r,\theta))\left(\left|\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta)\right|^2+\frac{1}{G(r)^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\theta}(r,\theta)\right|^2\right)G(r)\,drd\theta\\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_R^{R^{1/2}} \rho(w(r,\theta))\left|\frac{\partial w}{\partial\theta}(r,\theta)\right|^2\frac{1}{G(r)}\,drd\theta
\end{aligned}
$$

ただし，1 行目の等号で U が埋め込まれていることを使い，3 行目の等号は $e(w;\sigma,\rho)=|dw|^2=\sum_i |dw(e_i)|_\rho^2$ (e_i は正規直交枠) であることを用いている．

ここで，連続関数

$$
[R,R^{1/2}]\ni r\longmapsto \int_0^{2\pi}\rho(w(r,\theta))\left|\frac{\partial w}{\partial\theta}(r,\theta)\right|^2 d\theta\in\mathbb{R}
$$

の最小点を $\delta\in[R,R^{1/2}]$ とおくと

$$
E(w|_U)\geq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho(w(\delta,\theta))\left|\frac{\partial w}{\partial\theta}(\delta,\theta)\right|^2 d\theta\int_R^{R^{1/2}}\frac{1}{G(r)}\,dr
$$

となる．$0<r<1$ の範囲で，$G(r)<2r$ であるから

$$
\int_R^{R^{1/2}}\frac{1}{G(r)}\,dr>\int_R^{R^{1/2}}\frac{1}{2r}\,dr=\frac{1}{4}\log\frac{1}{R}.
$$

ゆえに，

$$
\int_0^{2\pi}\rho(w(\delta,\theta))\left|\frac{\partial w}{\partial\theta}(\delta,\theta)\right|^2 d\theta\leq 8E(w|_U)\left(\log\frac{1}{R}\right)^{-1}.
$$

したがって，$x_3,x_4\in\partial B_\sigma(p,\delta)$ に対して

$$
d_\rho(w(x_3),w(x_4))\leq 2\pi\left(8E(w|_U)\left(\log\frac{1}{R}\right)^{-1}\right)^{1/2}=4\sqrt{2}\pi E(w|_U)^{1/2}\left(\log\frac{1}{R}\right)^{-1/2}
$$

を得る．任意の 2 点 $x_1,x_2\in B_\sigma(p,R)$ に対して，$w(x_1),w(x_2)$ をつなぐ ρ-測地線を延長すると $w(\partial B_\sigma(p,\delta))$ と 2 点で交わる．それらを $w(x_3),w(x_4)$ とすることで，

$$
d_\rho(w(x_1),w(x_2))\leq d_\rho(w(x_3),w(x_4))\leq 4\sqrt{2}\pi E(w|_U)^{1/2}\left(\log\frac{1}{R}\right)^{-1/2}
$$

となり，結論を得る．$\square$

参考文献

[Wol89] Michael Wolf. The Teichmüller theory of harmonic maps. *Journal of differential geometry*, 29(2):449–479, 1989.